

Etude systématique des propriétés de focalisation d'un aimant à simple ou double focalisation

A G Elayi et M Gaillard

Institut de Physique Nucléaire, Université Claude Bernard Lyon-I, 43, Bd du 11 novembre 1918, 69621 Villeurbanne, France

Institut National de Physique Nucléaire et de Physique des Particules

Reçu 19 mars 1973, présentation définitive 12 juillet 1973

Résumé. Certaines caractéristiques des images données par un aimant ainsi que les distances de focalisation et de double focalisation ont été déterminées algébriquement à partir des matrices de transformation. Leur étude systématique en fonction des angles d'incidence et d'émergence, de l'indice de l'aimant, de l'induction magnétique, de l'angle au sommet et des distances objet-aimant et aimant-image permet de déterminer le rôle joué par ces différents paramètres, ce qui facilite la recherche des caractéristiques que doit avoir un aimant pour répondre à certaines exigences expérimentales bien précises.

Abstract. Certain characteristics of images given by a magnet as well as the distances of focusing and double focusing have been determined algebraically by means of the matrix method. Their systematic study as functions of the angles of entrance and exit, of the index of the magnet, of the magnetic induction field, of the deflection angle and of the distance from source to magnet and magnet to image, allows us to determine the role played by these parameters. By means of our method, the characteristics of a magnet with well defined properties can be determined in a simplified manner.

1. Introduction

Différents auteurs ont employé divers formalismes pour étudier au premier ordre les distances de double focalisation produites par un aimant : méthode géométrique (Cartan 1937), méthodes analytiques et matricielles (Cotte 1938, Enge 1967). Les aberrations sont introduites comme un effet du second et troisième ordre. C'est ainsi que les différentes courbes donnant les distances de double focalisation et les angles d'émergence en fonction de l'angle d'incidence ont déjà été données par Cross (1951), Camac (1951) Cependant, à notre connaissance aucun travail n'a étudié de façon systématique les variations que subissent les images lorsque les différents paramètres qui caractérisent le système magnétique varient de façon continue.

Pour effectuer cette étude, nous avons employé la méthode matricielle utilisée par Penner (1961), Takeshita (1966), Enge (1967). Nous avons représenté sous forme matricielle la transformation la plus générale représentant l'espace source-aimant-image. Nous avons considéré un aimant de forme quelconque ayant les pôles inclinés et nous avons tenu compte des effets du champ de fuite étendu EFF. L'interprétation du sens physique des différents termes de la matrice de transformation et l'étude de leurs variations en fonction des paramètres représentant l'espace objet-aimant-image nous permettent de définir le rôle joué par ces paramètres.

2. Le formalisme et son interprétation

2.1. Hypothèses et notations

Nous avons adopté les notations développées par Enge (1967). Les paramètres $\alpha, \beta, \Phi, R, A$ sont définis sur la figure 1. Deux systèmes d'axes rectangulaires $X_1 Y_1 Z_1$ et $X_2 Y_2 Z_2$ permettent de définir les mouvements des particules dans les espaces objet et image: X_1 suivant la trajectoire centrale, Y_1 perpendiculaire à X_1 dans le plan médian qui est le plan de symétrie des pôles et Z_1 perpendiculaire à $X_1 Y_1$. Les axes $X_2 Y_2 Z_2$ sont définis de la même façon sur la face de sortie.

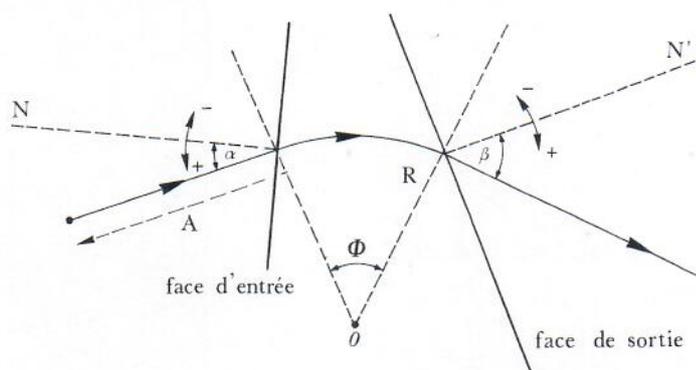


Figure 1.

L'induction magnétique considérée est de la forme $B_{z,0} = B_0(r/R)^{-n}$ (les indices z et 0 indiquent qu'il s'agit de la composante de l'induction normale aux pôles prise dans le plan médian). Les pôles sont donc inclinés; le cas particulier $n = 0$ correspond à un aimant à pôles parallèles.

Nous considérons dans un premier temps que le champ de fuite est rectangulaire (SCOFF) puis nous tenons compte des effets du champ de fuite étendue (EFF) en remplaçant α et β dans les matrices de transformation du plan vertical par α_v et β_v tels que

$$\alpha_v = \alpha - \frac{DI_2}{R} \frac{(1 + \sin^2 \alpha)}{\cos \alpha} \quad (1)$$

$$\beta_v = \beta - \frac{DI_2}{R} \frac{(1 + \sin^2 \beta)}{\cos \beta} \quad (2)$$

D étant l'entrefer et I_2 l'intégrale numérique du champ de fuite. Ceci exprime que le champ de fuite réel est moins focalisant dans le plan vertical que le champ de fuite rectangulaire. Ces formules ont été discutées dans Elayi (1973). Dans le plan horizontal, le champ de fuite étendu produit par rapport au champ de fuite rectangulaire un déplacement latéral de l'image sans changement de focalisation.

2.2. Matrices de transformation

Avec ces notations, nous allons remplacer l'espace compris entre la source, située à la distance A du point d'incidence sur la face d'entrée de l'aimant, et l'écran sur lequel nous recevons l'image par deux matrices M_1 et M_2 donnant les caractéristiques des trajectoires des particules sur l'écran en fonction des caractéristiques de la source.

Chacune des matrices M_1 et M_2 est le produit de trois matrices représentant les espaces objet-aimant, aimant et aimant-écran dans les plans horizontal et vertical.

La matrice représentant l'aimant s'obtient en développant en série de Taylor les valeurs de y_2, y'_2, z_2, z'_2 en fonction de y_1, y'_1, z_1, z'_1 et δ puis en remplaçant les différents termes par leurs valeurs en fonction des équations de mouvement $\delta = \Delta p/p$, p étant l'impulsion. δ est donc la dispersion en énergie du faisceau. Sa valeur doit rester faible pour que les valeurs de Φ et β puissent être considérées comme constantes.

Les matrices représentant les espaces objet-aimant et aimant-écran sont de la forme suivante dans les plans horizontal et vertical :

$$\begin{pmatrix} y_2/R \\ y'_2 \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & E/R & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1/R \\ y'_1 \\ \delta \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{pmatrix} z_2/R \\ z'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & E/R \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1/R \\ z'_1 \end{pmatrix}$$

l'espace libre ayant une longueur E .

Les matrices totales de transformation M_1 et M_2 sont reportées sur le tableau 1 avec $\epsilon_H = \sqrt{1-n}$ et $\epsilon_V = \sqrt{n}$; elles donnent les valeurs de $y_2/R, y'_2, \delta, z_2/R$ et z'_2 en fonction de $y_1/R, y'_1, \delta, z_1/R$ et z'_1 . Ces matrices contiennent donc toutes les informations au premier ordre concernant l'espace source-image. Le détail des calculs est exposé dans Elayi (1972). Ces matrices peuvent être déterminées à partir des coefficients du tableau 1 de l'article de Enge (1967).

2.3. Images stigmatiques

L'image d'un point est stigmatique si, quelle que soit la direction suivant laquelle les particules sont émises, elles convergent en un même point, ce qui s'exprime par

$$\frac{\partial y_2}{\partial y'_1} = 0 \quad (3)$$

dans le plan horizontal et

$$\frac{\partial z_2}{\partial z'_1} = 0 \quad (4)$$

dans le plan vertical.

Les distances L_H et L_V entre le point d'émergence sur la face de sortie et les images stigmatiques sont les distances de focalisation dans les plans horizontal et vertical. Nous pouvons tirer des équations (3) et (4) les équations suivantes :

$$\frac{R}{L_H} = -\tan \beta - T(\alpha, n, \Phi, A, R) \quad (5)$$

$$\frac{R}{L_V} = \tan \beta + T_1(\alpha, n, \Phi, A, R) \quad (6)$$

Tableau 1

M_1	$\left[\begin{aligned} & \cos \epsilon_H \Phi + \epsilon_H^{-1} \sin \epsilon_H \Phi \tan \alpha \\ & + (L_H/R) [-\epsilon_H \sin \epsilon_H \Phi (1 - \epsilon_H^{-2} \tan \alpha \tan \beta) \\ & + \cos \epsilon_H \Phi (\tan \alpha + \tan \beta)] \\ & - \epsilon_H \sin \epsilon_H \Phi (-\epsilon_H^{-2} \tan \alpha \tan \beta) \\ & + \cos \epsilon_H \Phi (\tan \alpha + \tan \beta) \end{aligned} \right]$	$\left[\begin{aligned} & (A/R) (\cos \epsilon_H \Phi + \epsilon_H^{-1} \sin \epsilon_H \Phi \tan \alpha) + \epsilon_H^{-1} \sin \epsilon_H \Phi \\ & + (L_H/R) \{ (A/R) [-\epsilon_H \sin \epsilon_H \Phi (1 - \epsilon_H^{-2} \tan \alpha \tan \beta) + \cos \epsilon_H \Phi (\tan \alpha + \tan \beta)] \\ & + \cos \epsilon_H \Phi + \epsilon_H^{-1} \sin \epsilon_H \Phi \tan \beta \} \\ & (A/R) [-\epsilon_H \sin \epsilon_H \Phi (1 - \epsilon_H^{-2} \tan \alpha \tan \beta) + \cos \epsilon_H \Phi (\tan \alpha + \tan \beta)] \\ & + \cos \epsilon_H \Phi + \epsilon_H^{-1} \sin \epsilon_H \Phi \tan \beta \end{aligned} \right]$	$\left[\begin{aligned} & \epsilon_H^{-1} (1 - \cos \epsilon_H \Phi) \\ & + (L_H/R) [\epsilon_H^{-1} \sin \epsilon_H \Phi \\ & + \epsilon_H^{-2} (1 - \cos \epsilon_H \Phi) \tan \beta] \\ & \epsilon_H^{-1} \sin \epsilon_H \Phi \\ & + \epsilon_H^{-2} (1 - \cos \epsilon_H \Phi) \tan \beta \end{aligned} \right]$	
0	0	0	1	
M_2	$\left[\begin{aligned} & \cos \epsilon_V \Phi - \epsilon_V^{-1} \sin \epsilon_V \Phi \tan \alpha \\ & + (L_V/R) [-\cos \epsilon_V \Phi (\tan \alpha + \tan \beta) \\ & - \epsilon_V \sin \epsilon_V \Phi (1 - \epsilon_V^{-2} \tan \alpha \tan \beta)] \\ & - \cos \epsilon_V \Phi (\tan \alpha + \tan \beta) \\ & - \epsilon_V \sin \epsilon_V \Phi (1 - \epsilon_V^{-2} \tan \alpha \tan \beta) \end{aligned} \right]$	$\left[\begin{aligned} & (A/R) [\cos \epsilon_V \Phi - \epsilon_V^{-1} \sin \epsilon_V \Phi \tan \alpha] + \epsilon_V^{-1} \sin \epsilon_V \Phi \\ & + (L_V/R) \{ (A/R) [-\cos \epsilon_V \Phi (\tan \alpha + \tan \beta) - \epsilon_V \sin \epsilon_V \Phi (1 - \epsilon_V^{-2} \tan \alpha \tan \beta)] \\ & + \cos \epsilon_V \Phi - \epsilon_V^{-1} \sin \epsilon_V \Phi \tan \beta \} \\ & (A/R) [-\cos \epsilon_V \Phi (\tan \alpha + \tan \beta) - \epsilon_V \sin \epsilon_V \Phi (1 - \epsilon_V^{-2} \tan \alpha \tan \beta)] \\ & + \cos \epsilon_V \Phi - \epsilon_V^{-1} \sin \epsilon_V \Phi \tan \beta \end{aligned} \right]$	$\left[\begin{aligned} & \cos \epsilon_V \Phi - \epsilon_V^{-1} \sin \epsilon_V \Phi \tan \alpha \\ & + (L_V/R) [-\cos \epsilon_V \Phi (\tan \alpha + \tan \beta) - \epsilon_V \sin \epsilon_V \Phi (1 - \epsilon_V^{-2} \tan \alpha \tan \beta)] \\ & - \cos \epsilon_V \Phi (\tan \alpha + \tan \beta) \\ & - \epsilon_V \sin \epsilon_V \Phi (1 - \epsilon_V^{-2} \tan \alpha \tan \beta) \end{aligned} \right]$	$\left[\begin{aligned} & \epsilon_V^{-1} (1 - \cos \epsilon_V \Phi) \\ & + (L_V/R) [-\cos \epsilon_V \Phi (\tan \alpha + \tan \beta) - \epsilon_V \sin \epsilon_V \Phi (1 - \epsilon_V^{-2} \tan \alpha \tan \beta)] \\ & - \cos \epsilon_V \Phi (\tan \alpha + \tan \beta) \\ & - \epsilon_V \sin \epsilon_V \Phi (1 - \epsilon_V^{-2} \tan \alpha \tan \beta) \end{aligned} \right]$

avec

$$T(\alpha, n, \Phi, A, R) = -\frac{(A/R)\epsilon_H \sin \epsilon_H \Phi - (A/R) \cos \epsilon_H \Phi \tan \alpha - \cos \epsilon_H \Phi}{(A/R) \cos \epsilon_H \Phi + (A/R)\epsilon_H^{-1} \sin \epsilon_H \Phi \tan \alpha + \epsilon_H^{-1} \sin \epsilon_H \Phi}$$

et

$$T_1(\alpha, n, \Phi, A, R) = -\frac{(A/R)\epsilon_V \sin \epsilon_V \Phi + (A/R) \cos \epsilon_V \Phi \tan \alpha_V - \cos \epsilon_V \Phi}{(A/R)\epsilon_V^{-1} \sin \epsilon_V \Phi \tan \alpha_V - (A/R) \cos \epsilon_V \Phi - \epsilon_V^{-1} \sin \epsilon_V \Phi}$$

Les images stigmatiques du plan horizontal et vertical sont confondues si

$$L_H = L_V = L;$$

L est alors la distance de double focalisation. La condition de double focalisation est traduite par l'équation (7)

$$\tan \beta + \tan \beta_V + T(\alpha, n, \Phi, A, R) + T_1(\alpha, n, \Phi, A, R) = 0. \quad (7)$$

Remarquons que les différents termes de la matrice de transformation ont des sens bien précis: $\partial y_2/\partial y_1$ et $\partial z_2/\partial z_1$ représentant par exemple le grandissement des images stigmatiques, $\partial y_2/\partial \delta$ est proportionnel à la dispersion, etc.

2.4. Zone d'utilisation d'un aimant

Avant de poursuivre cette étude, il faut préciser que les angles α négatifs peuvent nécessiter des faces d'entrée de forme bien particulière (figure 2); ils produisent un effet défocalisant dans le plan vertical. Il faut donc s'assurer que les particules ne touchent pas les pôles avant leur sortie de l'aimant car les conditions de focalisation n'en rendent pas compte.

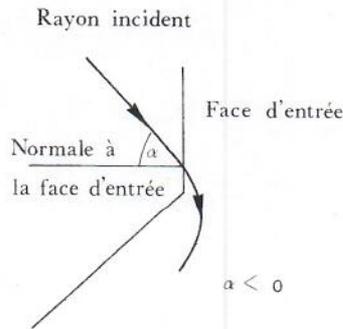


Figure 2.

La relation suivante exprime que les trajectoires ne touchent pas les pôles :

$$z_{10} + z'_1 A + \left[z'_1 - \frac{z_1}{R} \left(\tan(\alpha) - \frac{DI_2 (1 + \sin^2 \alpha)}{R \cos \alpha} \right) \right] \Phi R < D$$

z_{10} étant la taille de la source dans le plan vertical. Cette condition doit d'ailleurs être vérifiée même si α est positif.

Pour un aimant bien déterminé et dans des conditions expérimentales fixées, les valeurs de α doivent être supérieures à la limite α_L donnée par l'équation précédente.

2.5. Résolution sur ordinateur de l'équation $f = 0$, condition de double focalisation

Pour étudier graphiquement les distances de double focalisation nous devons résoudre les équations $f(\alpha, \beta, \Phi, n, A, R) = 0$ déduites de la condition de double focalisation pour des conditions expérimentales et pour une taille d'aimant bien déterminées.

Les relations (1) et (2) que nous avons introduites pour tenir compte du champ de fuite étendu ne nous permettent plus d'obtenir pour β une expression de la forme $\beta = g(\alpha, \Phi, n, R, A)$. On ne peut qu'étudier graphiquement $\beta = g(\alpha)$ et $L = g_2(\alpha)$ après avoir résolu numériquement les équations $f = 0$. Pour cela nous avons fait varier α par pas successifs et pour chaque valeur nous avons cherché la valeur de β racine de l'équation (7), par itérations sur ordinateur en employant la méthode d'interpolation parabolique de Muller (qui consiste à trouver à partir de deux valeurs β_1 et β_2 telles que $f(\beta_1) \times f(\beta_2) < 0$ la racine β de l'équation $f = 0$), voir Kristiansen (1963). Le programme que nous avons écrit permet d'obtenir : (i) les trajectoires des rayons centraux pour différents groupes, (ii) les valeurs de β et Φ correspondantes, (iii) les distances de double focalisation, (iv) les tailles des images stigmatiques et d'images situées à une distance quelconque de l'aimant, et (v) des grandeurs proportionnelles à la dispersion de l'aimant.

3. Etude des distances de focalisation en fonction des différents paramètres

3.1. Surfaces limites : focales et zéros

Les équations (5) et (6) nous permettent d'étudier deux familles de points particuliers présentant un intérêt théorique et pratique.

3.1.1. Surfaces focales. Les foyers objet étant les points dont l'image est située à l'infini, l'ensemble des paramètres que les définissent doivent répondre aux conditions suivantes dans les plans horizontal et vertical :

$$\frac{R}{A_{HF}} + \tan \alpha_{HF} - \frac{\epsilon_H \sin \epsilon_H \Phi_{HF} - \cos \epsilon_H \Phi_{HF} \tan \beta_{HF}}{\cos \epsilon_H \Phi_{HF} + \epsilon_H^{-1} \sin \epsilon_H \Phi_{HF} \tan \beta_{HF}} = 0 \quad (8)$$

$$\frac{R}{A_{VF}} - \tan \alpha_{VF} - \frac{\epsilon_V \sin \epsilon_V \Phi_{VF} + \cos \epsilon_V \Phi_{VF} \tan \beta_{VF}}{\cos \epsilon_V \Phi_{VF} - \epsilon_V^{-1} \sin \epsilon_V \Phi_{VF} \tan \beta_{VF}} = 0. \quad (9)$$

L'indice HF correspond à un foyer du plan horizontal et VF du plan vertical. A_{HF} et A_{VF} sont les distances focales, chacune d'un aimant caractérisé par les valeurs α_{HF} , β_{HF} , Φ_{HF} , R et α_{VF} , β_{VF} , Φ_{VF} , R . Notons que nous avons appelé distance de focalisation la distance entre le point d'impact sur la face de sortie de l'aimant et une image stigmatique quelconque, ce qui est sans rapport avec la distance focale.

Pour un aimant à pôles parallèles les équations (8) et (9) prennent une forme simple

$$\frac{R}{A_{HF}} = \tan(\Phi_{HF} - \beta_{HF}) - \tan \alpha_{HF} \quad (8a)$$

$$\frac{R}{A_{VF}} = \tan \alpha_{VF} + \frac{\tan \beta_{VF}}{1 - \Phi_{VF} \tan \beta_{VF}}. \quad (9a)$$

Nous avons représenté sur la figure 3 dans un espace à trois dimensions α, β, A , la surface lieu des points dont l'ensemble des paramètres caractérisent les foyers du plan

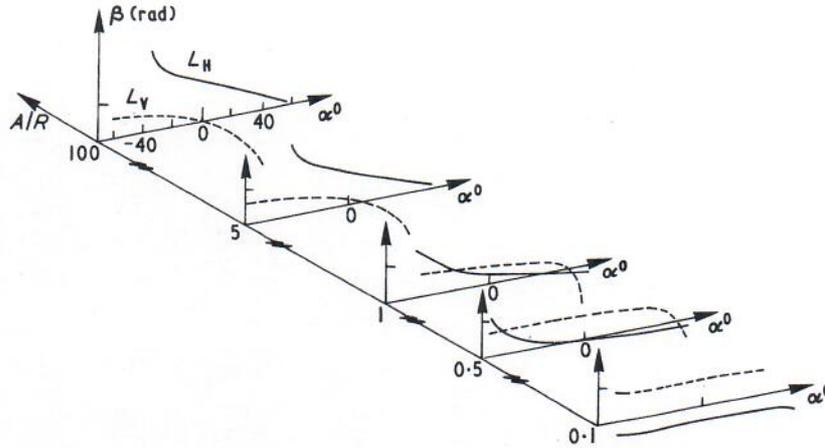


Figure 3. Surfaces focales des plans horizontal et vertical, $\Phi = \pi/3$, $n = 0$.

horizontal pour un aimant d'angle au sommet Φ bien déterminé. Remarquons que lorsqu'un des paramètres, X , passe en variant par une racine X_{HF} vérifiant l'équation (8) il y a discontinuité dans la variation de L_H qui passe de $\pm\infty$ à $\mp\infty$ pour les valeurs X_{HF}^- et X_{HF}^+ . Le comportement est identique dans le plan vertical.

Les foyers images peuvent être déduits des foyers objets par une simple permutation de α et β .

3.1.2. Régions correspondant à $L_H = 0$ et $L_V = 0$. L'étude des quantités $\chi_H = R/L_H$ et $\chi_V = R/L_V$ est également intéressante. χ_H est proportionnel à la convergence des rayons dans le plan horizontal et χ_V à la convergence des rayons dans le plan vertical. Les valeurs $L_H = 0$ et $L_V = 0$ sont des points de discontinuité pour χ_H et χ_V . Physiquement, l'aimant est fortement convergent, dans le plan vertical, par exemple pour $L_V = 0^+$ et devient fortement divergent pour $L_V = 0^-$ (χ_V passe alors de $+\infty$ à $-\infty$) et les différents paramètres vérifient les relations (10) et (11) suivantes pour $L_V = 0$

$$\frac{A_{H_0}}{R} + \frac{1}{\tan \alpha_{H_0} + \epsilon_H \cot \epsilon_H \Phi_{H_0}} = 0 \quad (10)$$

$$\frac{A_{V_0}}{R} + \frac{1}{-\tan \alpha_{V_0} + \epsilon_V \cot \epsilon_V \Phi_{V_0}} = 0. \quad (11)$$

Les courbes correspondant à ces équations sont des courbes limites et leurs valeurs sont indépendantes de β .

3.2. Variations des distances de focalisation en fonction des différents paramètres

3.2.1. Variation des distances de focalisation en fonction de A . Nous écrivons les équations (3) et (4) sous la forme (10) et (11)

$$L_H = \frac{-R}{\tan \beta_H + T} \quad (12)$$

$$L_V = \frac{R}{\tan \beta_V + T_1} \quad (13)$$

Puisque

$$\frac{\partial L_H}{\partial A} = R \frac{\partial T}{\partial A} (\tan \beta + T)^{-2}$$

et que

$$\frac{\partial T}{\partial A} = \frac{-1}{R[(A/R)\epsilon_H^{-1} \sin \epsilon_H \Phi \tan \alpha + (A/R) \cos \epsilon_H \Phi - \epsilon_H^{-1} \sin \epsilon_H \Phi]^2}$$

la dérivée partielle de L_H par rapport à A est toujours négative. De la même façon

$$\frac{\partial L_V}{\partial A} = -R \frac{\partial T_1}{\partial A} (\tan \beta_V + T_1)^{-2}$$

et

$$\frac{\partial T_1}{\partial A} = \frac{1}{R[(A/R)\epsilon_V^{-1} \sin \epsilon_V \Phi \tan \alpha_V - (A/R) \cos \epsilon_V \Phi]^2}$$

La dérivée partielle de L_V par rapport à A est toujours négative. L_H et L_V sont donc des fonctions toujours décroissantes de A à l'intérieur des zones limitées par les points de discontinuité. Autrement dit, les distances de focalisation verticale et horizontale diminuent quand la source s'éloigne de l'aimant. Les points de discontinuité sont tels que $A = A_{HF}$ et $A = A_{VF}$. Ils correspondent respectivement à $L_H = \infty$ et $L_V = \infty$. La figure 4 représente un exemple de variation de L_H en fonction de A : partant de la valeur $L_H = A'_{HF}$ pour $A \rightarrow -\infty$, L_H diminue quand A augmente et tend vers $-\infty$ pour $A = A_{HF}^-$ où il y a discontinuité sur la valeur de L_H qui passe à $+\infty$ pour $A = A_{HF}^+$. L_H diminue à nouveau quand A continue à augmenter et reprend la valeur initiale A'_{HF} quand $A \rightarrow \infty$. Remarquons que lorsque A augmente, la convergence χ ne subit de discontinuité que pour $A = A_{H0}$. Aussi le volume compris entre les surfaces focales et les surfaces correspondant à $L_H = 0$ et $L_V = 0$ est le seul correspondant à des zones de focalisation positives. L'intersection des volumes correspondant au plan horizontal et vertical est le domaine où il y a focalisation positive dans les deux plans pour un aimant de forme bien déterminée.

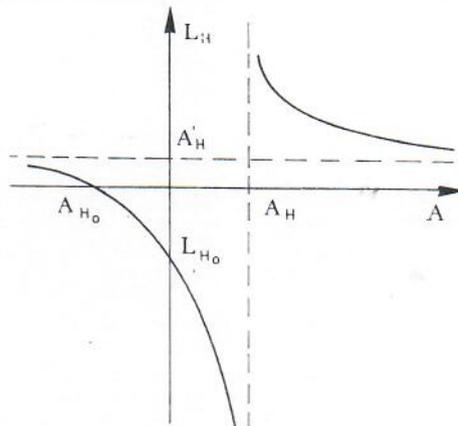


Figure 4.

3.2.2. *Variation des distances de focalisation en fonction de α .* La dérivée partielle de L_H par rapport à α est toujours positive car

$$\frac{\partial L_H}{\partial \alpha} = R \frac{\partial T}{\partial \alpha} (\tan \beta + T)^{-2}$$

et

$$\frac{\partial T}{\partial \alpha} = \frac{A^2}{R^2 \cos^2 \alpha [(A/R) \epsilon_H^{-1} \sin \epsilon_H \Phi \tan \alpha + (A/R) \cos \epsilon_H \Phi + \epsilon_H^{-1} \sin \epsilon_H \Phi]^2}$$

De même la dérivée partielle de L_V par rapport à α est toujours négative ; car

$$\frac{\partial L_V}{\partial \alpha} = -R \frac{\partial T_1}{\partial \alpha} (\tan \beta_V + T_1)^{-2}$$

et

$$\frac{\partial T_1}{\partial \alpha} = \frac{A^2}{R^2 \cos^2 \alpha_V [(A/R) \epsilon_V^{-1} \sin \epsilon_V \Phi \tan \alpha_V - (A/R) \cos \epsilon_V \Phi - \epsilon_V^{-1} \sin \epsilon_V \Phi]^2}$$

A l'intérieur des zones limitées par les points de discontinuité, qui sont les surfaces correspondant à $L_H = 0$ et $L_V = 0$, l'aimant devient plus focalisant dans le plan vertical et plus défocalisant dans le plan horizontal quand l'angle d'incidence α augmente. Ces résultats sont illustrés sur la figure 5 où nous avons tracé pour différentes valeurs de l'angle d'émergence β les variations de L_H en fonction de α .

Quand α varie de $-\pi/2$ à $\pi/2$, L_H et L_V prennent toutes les valeurs comprises entre $\pm \infty$. Partant de $\alpha = -\pi/2$, L_H augmente alors que L_V diminue quand α augmente. L_H tend vers $+\infty$ et L_V tend vers $-\infty$ pour α_{HF} et α_{VF} . L_H augmente à partir de $-\infty$ et L_V diminue à partir de $+\infty$, quand α augmente encore, et reprennent les valeurs

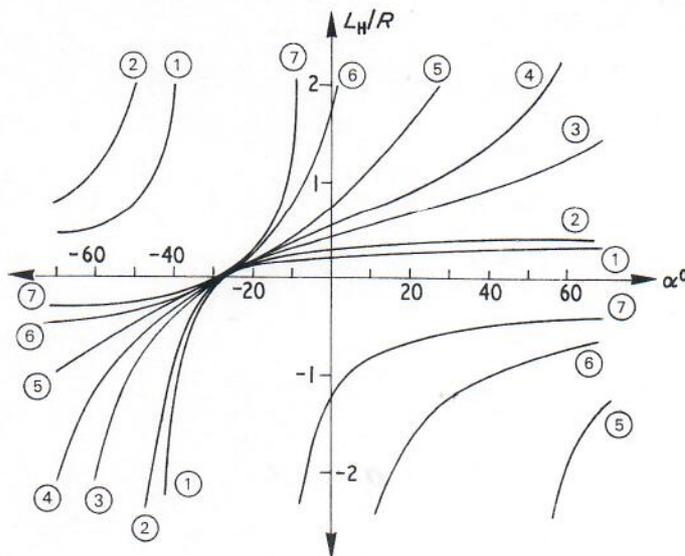


Figure 5. Variation des distances de focalisation du plan horizontal en fonction de α pour différentes valeurs de β . $\Phi = \pi/2$, $A/R = 2$, $n = 0$. 1, $\beta = -70^\circ$; 2, $\beta = -60^\circ$; 3, $\beta = -20^\circ$; 4, $\beta = 0^\circ$; 5, $\beta = 30^\circ$; 6, $\beta = 60^\circ$; 7, $\beta = 70^\circ$.

initiales quand α tend vers $\pi/2$. Remarquons que pour réaliser pratiquement les variations de α et β tout en conservant les autres paramètres constants, on pourrait pratiquer des zones de pôles mobiles aux points d'incidence et d'émergence, comme l'indique la figure 6.

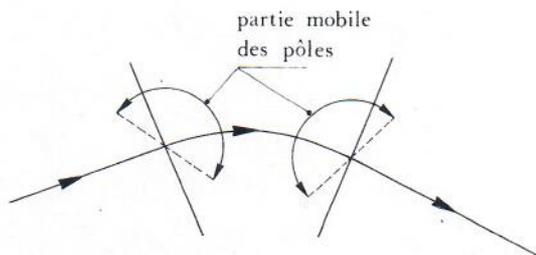


Figure 6.

3.4. Variations des distances de focalisation en fonction de l'angle d'émergence β

De même, nous pouvons écrire :

$$\frac{\partial L_H}{\partial \beta} = \frac{R}{\cos^2 \beta (\tan \beta + T)^2}$$

$$\frac{\partial L_V}{\partial \beta} = \frac{-R}{\cos^2 \beta_V (\tan \beta_V + T_1)^2}$$

car

$$\frac{\partial L_V}{\partial \beta} \approx \frac{\partial L_V}{\partial \beta_V}$$

L_H est donc une fonction croissante en fonction de β alors que L_V est une fonction décroissante de β . A l'intérieur des zones limitées par les points de discontinuité, c'est-à-dire β_{H_0} et β_{V_0} , l'aimant est donc plus focalisant dans le plan vertical et plus défocalisant dans le plan horizontal quand β augmente. Les variations de L_H/R et L_V/R en fonction de β sont celles de $1/(\tan \beta + \text{constante})$.

En résumé, l'aimant devient plus convergent dans le plan vertical et plus divergent dans le plan horizontal quand α ou β augmentent tant que α et β ne traversent pas les valeurs annulant L_H et L_V . La figure 7 donne les variations de L_H et L_V en fonction de β pour différentes valeurs de α .

3.5. Variations des distances de focalisation en fonction de l'induction B

Les variations de l'induction B se traduisent par une variation du rayon de courbure R :

$$\frac{\partial R}{\partial B} = -\frac{\sqrt{2mE}}{qB^2}$$

donc signe de $\partial/\partial R = -\text{signe } \partial/\partial B$

$$\frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{L_H}{R} \right) = \frac{\partial T}{\partial R} (\tan \beta + T)^{-2}$$

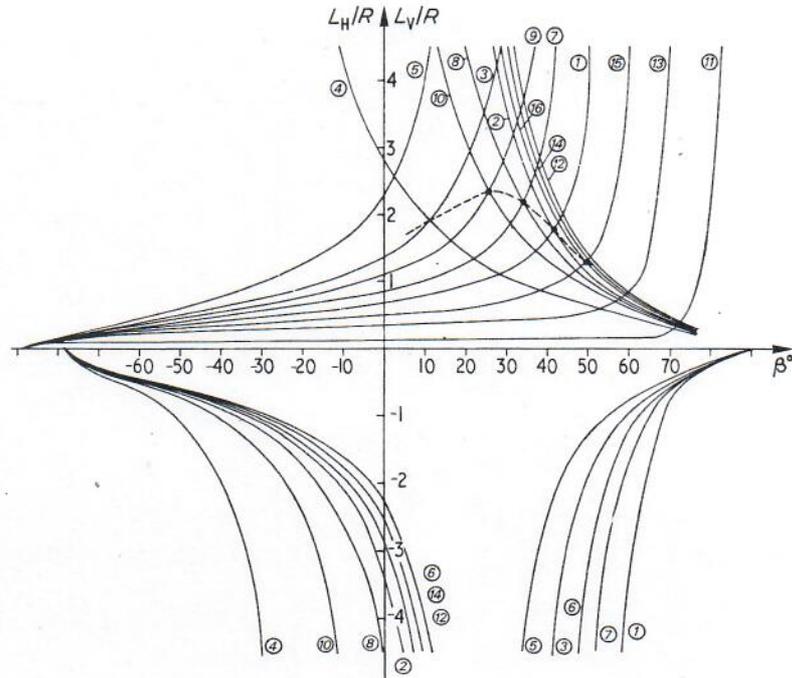


Figure 7. Variation des distances de focalisation du plan horizontal et vertical en fonction de β pour différentes valeurs de α . $\Phi = \pi/2$, $n = 0$, $A/R = 2$. 1, 2, $\alpha = 10^\circ$; 3, 4, $\alpha = 40^\circ$; 5, 6, $\alpha = 60^\circ$; 7, 8, $\alpha = 20^\circ$; 9, 10, $\alpha = 30^\circ$; 11, 12, $\alpha = -20^\circ$; 13, 14, $\alpha = -10^\circ$; 15, 16, $\alpha = 0^\circ$.

et

$$\frac{\partial T}{\partial R} = \frac{A}{R^2[(A/R)\epsilon_H^{-1} \sin \epsilon_H \Phi \tan \alpha + (A/R) \cos \epsilon_H \Phi + \epsilon_H^{-1} \sin \epsilon_H \Phi]^2}$$

La dérivée partielle de L_H/R par rapport à R est par suite toujours positive, sa dérivée partielle par rapport à B est par contre toujours négative. L_H/R diminue donc à l'intérieur de tout domaine à variations continues quand B augmente. Or R est une quantité positive qui décroît quand B augmente, $1/R$ est une quantité positive et croissante en fonction de B , le produit $R^{-1} \times L_H$ est décroissant. L_H est donc une fonction décroissante de B à l'intérieur de tout domaine à variations continues.

On démontre de même que L_V est une fonction décroissante de B à l'intérieur de tout domaine à variations continues.

L'aimant est d'autant plus convergent que l'induction B est plus grande à condition que les distances L_H et L_V ne traversent pas les valeurs annulant L_H et L_V .

Remarquons que ce calcul n'est utile que lorsqu'on cherche à construire un aimant car pour un aimant donné de faces planes, quand B varie, le rayon varie, mais β aussi.

3.6. Variations de L_H et L_V en fonction de Φ

$$\frac{\partial L_H}{\partial \Phi} = -R \frac{\partial T}{\partial \Phi} (\tan \beta + T)^{-2}$$

$$\frac{\partial L_V}{\partial \Phi} = -R \frac{\partial T_1}{\partial \Phi} (\tan \beta_V + T_1)^{-2}$$

avec

$$\frac{\partial T}{\partial \Phi} = - \frac{(A^2/R^2)\epsilon_H^2 + (\tan \alpha + 1)^2}{\cos^2 \epsilon_H \Phi [(A/R)\epsilon_H^{-1} \sin \epsilon_H \Phi \tan \alpha + (A/R) \cos \epsilon_H \Phi + \epsilon_H^{-1} \sin \epsilon_H \Phi]^2}$$

et

$$\frac{\partial T_1}{\partial \Phi} = \frac{(A^2/R^2)\epsilon_V^2 + (\tan \alpha_V - 1)^2}{\cos^2 \epsilon_V \Phi [(A/R)\epsilon_V^{-1} \sin \epsilon_V \Phi \tan \alpha_V - (A/R) \cos \epsilon_V \Phi - \epsilon_V^{-1} \sin \epsilon_V \Phi]^2}$$

Les dérivées partielles de L_H et L_V par rapport à Φ sont négatives ce qui indique que plus nous choisissons une valeur de Φ grande, plus l'aimant est focalisant dans les plans horizontal et vertical, les points L_H et $L_V = 0$ ne devant évidemment pas être traversés.

3.7. Variations des distances de focalisation en fonction de l'indice de l'aimant n

En remarquant que le signe de $\partial/\partial n = -$ signe de $\partial/\partial \epsilon_H$ et que le signe de $\partial/\partial n =$ signe de $\partial/\partial \epsilon_V$, nous pouvons voir, d'après les expressions de $(\partial/\partial \epsilon_H)(T/\epsilon_H)$ et $(\partial/\partial \epsilon_V)(T_1/\epsilon_V)$:

$$\frac{\partial}{\partial \epsilon_H} \left(\frac{T}{\epsilon_H} \right) = \frac{(A^2/R^2)\Phi \tan^2 \alpha + [A^2/R^2 + 2(A/R)\Phi] \tan \alpha + \Phi + A/R + (A^2/R^2)\Phi \epsilon_H^2}{[(A/R) \sin \epsilon_H \Phi \tan \alpha + (A/R)\epsilon_H \cos \epsilon_H \Phi + \sin \epsilon_H \Phi]^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial \epsilon_V} \left(\frac{T_1}{\epsilon_V} \right) = \frac{(A^2/R^2)\Phi \tan^2 \alpha_V - [A^2/R^2 + 2(A/R)\Phi] \tan \alpha + \Phi + A/R + (A^2/R^2)\Phi \epsilon_V^2}{[(A/R) \sin \epsilon_V \Phi \tan \alpha_V - (A/R)\epsilon_V \cos \epsilon_V \Phi - \sin \epsilon_V \Phi]^2}$$

que les dérivées partielles de L_H et L_V par rapport à n dépendent de α . Un accroissement de la valeur de n peut donc avoir suivant le cas un effet focalisant ou défocalisant; chaque cas particulier doit être examiné séparément.

Examinons le cas particulier $\alpha = \beta = 0$:

$$\frac{\partial}{\partial \epsilon_H} \left(\frac{T}{\epsilon_H} \right) = - \frac{\Phi + A/R + (A^2/R^2)\Phi \epsilon_H^2}{[(A/R)\epsilon_H \cos \epsilon_H \Phi + \sin \epsilon_H \Phi]^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial \epsilon_V} \left(\frac{T_1}{\epsilon_V} \right) = \frac{\Phi + A/R + (A^2/R^2)\Phi \epsilon_V^2}{[-(A/R)\epsilon_V \cos \epsilon_V \Phi - \sin \epsilon_V \Phi]^2}$$

Le signe de $(\partial/\partial \epsilon_H)(\epsilon_H L_H/R)$ est donc toujours négatif comme celui de $(\partial/\partial \epsilon_V)(\epsilon_V L_V/R)$. Or ϵ_H est une fonction positive et croissante de n ; le produit des deux fonctions étant décroissant, L_H est donc une fonction décroissante de n . De même, ϵ_V est une quantité positive et croissante avec n , et L_V est une fonction décroissante de n .

Donc à l'intérieur de tout domaine où les fonctions L_H et L_V sont continues en fonction de n , L_H augmente alors que L_V diminue quand n augmente pour $\alpha = \beta = 0$.

Ce comportement rappelle celui de L_H et L_V en fonction de α et β

4. Double focalisation

4.1. Rôle joué par α et β dans la double focalisation

L'étude de la double focalisation qui implique la résolution de l'équation (7) déduite

de la condition de double focalisation $f(\alpha, \beta, \Phi, n, A, R) = 0$ ne peut se faire que numériquement. Nous allons nous ramener néanmoins à une valeur de la double focalisation déduite des matrices de transformation dans l'approximation $\beta_v = \beta$. L'équation (7) nous donne alors $\tan \beta = -\frac{1}{2}(T + T_1)$ et $L = 2R/(T_1 - T)$.

L'étude est différente de celle des distances de focalisation car si un paramètre varie, un autre doit varier en sens inverse pour retrouver la double focalisation.

α et β jouent par exemple, un rôle complémentaire très intéressant. En effet $\partial T/\partial \alpha$ et $\partial T_1/\partial \alpha$ étant toujours positifs, si α augmente, β doit diminuer d'après l'expression $\tan \beta = -\frac{1}{2}(T + T_1)$ pour que l'on retrouve la condition de double focalisation. Nous pouvons d'ailleurs voir ces variations d'un point de vue plus physique. En effet partant de la valeur $L = L_H = L_V$ pour $\alpha = \alpha_0$ et $\beta = \beta_0$, le point de focalisation dans le plan horizontal s'éloigne, celui du plan vertical se rapproche de l'aimant si α augmente. C'est une diminution de la valeur de β qui va permettre de rapprocher le point de focalisation dans le plan horizontal et d'éloigner celui du plan vertical jusqu'à ce que nous retrouvions une nouvelle position $L' = L'_H = L'_V$.

4.2. Variations de la distance de double focalisation en fonction de A , Φ et B

De la condition $L = 2R/(T_1 - T)$, nous pouvons tirer certains résultats concernant les variations de L en fonction de A , Φ et B . Nous avons

$$\begin{array}{ccc} \frac{\partial T}{\partial A} < 0 & \frac{\partial T_1}{\partial A} > 0 & \frac{\partial T}{\partial \Phi} < 0 \\ \frac{\partial T_1}{\partial \Phi} > 0 & \frac{\partial T}{\partial B} > 0 & \frac{\partial T_1}{\partial B} < 0 \end{array}$$

donc

$$\frac{\partial L}{\partial A} < 0 \quad \frac{\partial L}{\partial \Phi} < 0 \quad \frac{\partial L}{\partial B} < 0.$$

Il ne faut néanmoins pas voir l'influence d'un seul paramètre sur L puisqu'il y en a au moins deux qui doivent varier pour conserver la condition de double focalisation.

Nous allons tout d'abord fixer la valeur de α et nous faisons varier un des paramètres A , Φ ou B . Augmentons par exemple A . La valeur de L diminue d'après $\partial L/\partial A < 0$ et ceci à condition de ne pas traverser un point de discontinuité en A . Pour que L soit une distance de double focalisation, il suffit de trouver la valeur de β vérifiant la condition (7), $f = 0$. Ainsi si nous traçons les courbes $L = f(\alpha)$ pour deux valeurs différentes A_0 et A_1 de A ($A_1 > A_0$), la courbe $L(A_1)$ sera située au-dessous de la courbe $L(A_0)$. Les valeurs $\beta = f(\alpha)$ sont évidemment différentes pour les deux courbes $L(A_0)$ et $L(A_1)$, mais le résultat important est le fait que plus A , Φ ou B sont grands et plus les valeurs de L deviennent petites à condition de ne pas traverser un point de discontinuité correspondant au paramètre que nous faisons varier, c'est-à-dire A , Φ ou B . La courbe en pointillés de la figure 7, intersections des courbes de focalisation dans les plans horizontal et vertical, est la courbe de double focalisation pour les valeurs indiquées des paramètres. Notons que cette courbe ainsi que les courbes des figures 8 et 9 sont différentes de celles qui sont données dans la littérature car nous avons tenu compte, pour les établir, des effets du champ de fuite étendu EFF dont l'action est équivalente à une réduction de focalisation dans le plan vertical. Tout se passe donc comme si nous remplacions les angles d'entrée et de sortie par des angles de plus faible valeur, les effets de focalisation

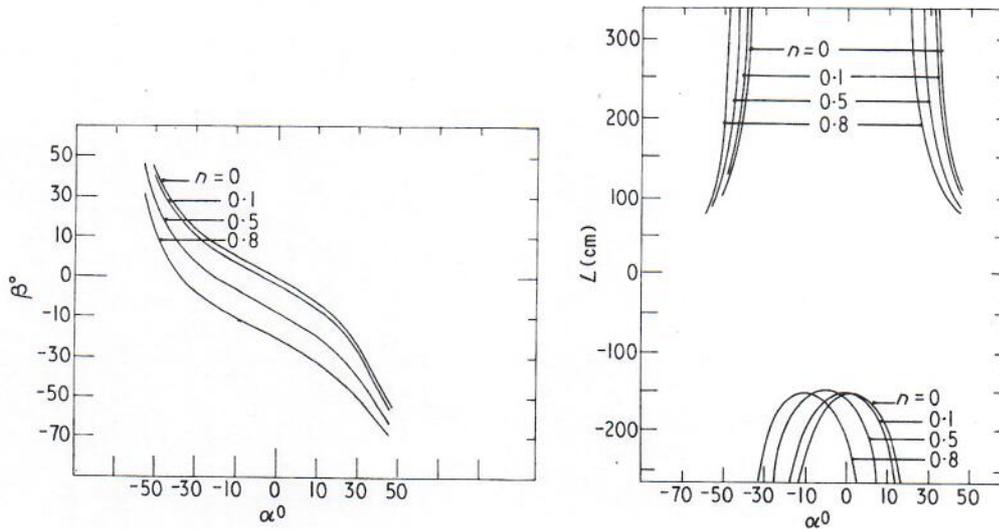


Figure 8. Variation de la distance de double focalisation et de l'angle de sortie β en fonction de α pour différentes valeurs de n . $\Phi = \pi/4$, $A/R = \frac{3}{2}$ (courbes théoriques).

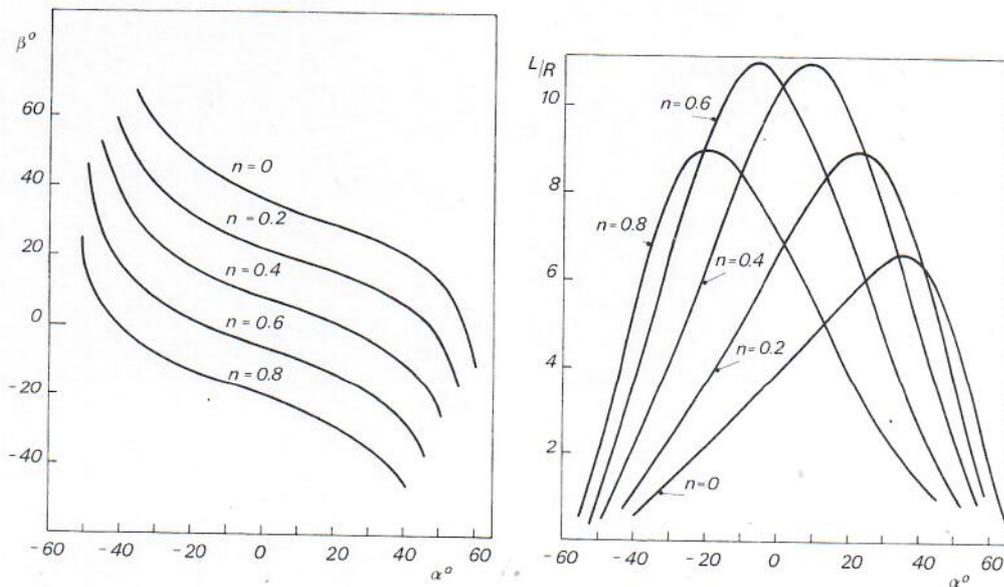


Figure 9. Variations de la distance de double focalisation et de l'angle de sortie β en fonction de α . $A/R = 1$, $\Phi = 1.57$, la valeur de l'intégrale numérique du champ de fuite étant de 0.309 (courbes théoriques).

dans le plan horizontal restant inchangés. Dans l'évaluation des effets du champ de fuite étendu, dont l'expression dépend de la valeur numérique de l'intégrale du champ de fuite, il subsiste un élément d'incertitude relatif à la valeur de cette intégrale. Plusieurs valeurs sont données dans la littérature, elles dépendent de la forme et de la taille des pôles. Nous avons pris la valeur 0.7 pour les courbes de la figure 7 et la valeur donnée par Enge pour ce qu'il appelle 'the short-tail curve' pour les courbes de la figure 9.

4.3. Variations de L en fonction de n

Le sens de variation de L en fonction de n dépend de α . Si ce dernier est fixé, le rôle joué par n étant différent pour L_H et L_V , ce rôle est identique à celui de α et non à celui de A , Φ ou B qui agissent de la même façon sur L_H et L_V . Les courbes de la figure 8 donnent un exemple de variations de L en fonction de α pour différentes valeurs de n .

4.4. Cas particulier d'un aimant réalisant toujours la double focalisation

L'étude des distances de focalisation dans les plan horizontal et vertical nous amène à considérer le cas particulier où L_H serait toujours égal à L_V . Si cette condition pouvait être réalisée, la double focalisation serait toujours vérifiée.

Il ressort de l'étude précédente que la différence entre L_H et L_V a deux origines.

(i) Les variations de L_H et L_V en fonction de α et β montrent que L_H croît avec α et β alors que L_V décroît. Les coefficients de α et β sont de signes opposés dans L_H et L_V . Pour avoir toujours $L_H = L_V$ il faut que les coefficients de α et β soient nuls (ce qui est impossible puisque le coefficient de β est égal à 1) ou que $\alpha = \beta = 0$.

(ii) La seconde différence provient des expressions de ϵ_H et ϵ_V :

$$\epsilon_H = \sqrt{1-n} \quad \epsilon_V = \sqrt{n}.$$

Quant n augmente, ϵ_V augmente alors que ϵ_H diminue. Néanmoins pour $n = \frac{1}{2}$, $\epsilon_H = \epsilon_V$ et les deux expressions de L_H et L_V deviennent

$$L_H = L_V = \frac{A \cos \sqrt{\frac{1}{2}}\Phi + \sqrt{2}R \sin \sqrt{\frac{1}{2}}\Phi}{A\sqrt{\frac{1}{2}} \sin \sqrt{\frac{1}{2}}\Phi - R \cos \sqrt{\frac{1}{2}}\Phi} R.$$

Dans ce cas $L_H = L_V = L$ quelle que soit la valeur des autres paramètres. Si nous voulons avoir $\alpha = \beta = 0$ pour plusieurs trajectoires, il suffit (Elayi 1972): (i) que la face de sortie soit circulaire, (ii) que le point d'incidence des particules sur la face d'entrée de l'aimant appartienne à ce cercle, (iii) et que la face d'entrée soit tangente à ce cercle.

4.5. Trajectoires centrales de particules d'énergies très différentes

On tient compte des particules dont l'énergie est voisine de celle de la trajectoire centrale en introduisant le terme $\delta = \Delta p/p$. Mais si les énergies sont très différentes les unes des autres, elles vont se présenter à la face de sortie sous des angles β différents et la valeur de Φ est elle aussi différente. Pour pouvoir étudier les caractéristiques de l'ensemble des particules, nous avons écrit un programme donnant les valeurs de Φ , R , β pour un aimant donné dont les faces d'entrée et de sortie sont soit droites, soit circulaires. Deux remarques sont à faire:

(i) pour des faces d'entrée et de sortie droites, on a $\Phi - \beta = \text{constante}$;

(ii) pour des faces d'entrée et de sortie circulaires on a $\alpha = \beta$ quelle que soit la valeur de l'énergie ou de la masse de la particule.

Ces remarques simplifient beaucoup les calculs. Nous recherchons analytiquement les valeurs de Φ et β pour chaque trajectoire et les valeurs obtenues peuvent être ensuite injectées dans le programme qui recherche les différentes autres grandeurs décrites dans le paragraphe 2.5.

5. Conclusion

L'étude précédente a permis de représenter matriciellement la transformation source-image produite par un aimant. L'étude mathématique des matrices de transformation ainsi obtenues et l'interprétation des équations déduites de ces matrices permettent de dégager les propriétés physiques du système magnétique étudié. C'est ainsi que nous avons tiré certaines propriétés générales des aimants et nous avons pu voir le rôle joué par les différents paramètres qui sont α , β , A , Φ , n , B .

Les résultats que nous avons obtenus sont particulièrement utiles lorsqu'il s'agit de définir un aimant devant réaliser des performances bien particulières; ils permettent de voir dans quel sens doit varier tel ou tel autre paramètre afin de se rapprocher du résultat recherché.

Ainsi si l'on désire obtenir la double focalisation des protons de 4 MeV par exemple, nous devons fixer l'ensemble des paramètres autour des valeurs que nous jugeons raisonnables dans le contexte de l'expérience à réaliser. Si par exemple on a fixé $B = 1$ T, $A/R = 1$, $\Phi = 45^\circ$ et $n = 0$, les courbes $L = f(\alpha)$ et $\beta = f(\alpha)$ permettent de se rendre compte tout de suite qu'il n'existe pas de valeur de L , α ou β donnant une solution raisonnable: les distances de double focalisation sont soit négatives, soit positives pour des angles α et β très importants. Il faut donc augmenter la focalisation du système soit en augmentant B , ou A , ou Φ , ou en augmentant plusieurs paramètres à la fois, c'est-à-dire prendre par exemple $\Phi = \pi/6$, puis $A/R = 2$ etc. S'il est nécessaire d'obtenir une forte focalisation seulement dans le plan vertical, il faut alors augmenter α et β ; si l'on veut obtenir simplement une tache de dimensions inférieures à une limite donnée, c'est alors y_2 et z_2 qu'il faut déterminer, ou bien les grandissements G_H et G_V .

Il est évident qu'au cours de la variation de ces paramètres, le point représentatif de l'aimant ne doit pas traverser les surfaces de discontinuité du paragraphe 3.1.

Il est ainsi possible, en faisant varier judicieusement les différents paramètres, d'atteindre par approximations successives le résultat cherché.

Références

- Camac M 1951 *Rev. sci. Instrum.* **22** 197
- Cartan L 1937 *J. Phys., Paris* **8** 453
- Cotte M 1938 *Ann. Phys., Paris* **10** 333
- Cross W G 1951 *Rev. sci. Instrum.* **22** 717
- Elayi A G 1973 *Thèse 3^e Cycle* Université de Lyon
- Enge H A 1967 *Focusing of Charged Particles* ed A Septier (New York: Academic Press)
- Kristiansen G K 1963 *Zero of Arbitrary Function* vol 3 (Copenhagen) pp 205-6
- Penner S 1961 *Rev. sci. Instrum.* **32** 150
- Takeshita 1966 *Z. Naturf.* **21a** 9